

# リアプノフ指数で測れないカオス力学系の不安定性\*

一橋大学 商学部 経営学科  
加藤響 (Hibiki KATO) †

## 概要

カオス力学系における初期値鋭敏性を特徴づける指標として、摂動の伸び率を表すリアプノフ指数が広く知られている。一方で、局所的かつ短期的にはリアプノフ指数とは異なる挙動を示す誤差発展が観測されており、そのメカニズムについては詳細が十分に解明されていない。本稿では、このような誤差発展のメカニズムに着目し、線形的なメカニズムの一例を紹介する。

## 1 導入

### 1.1 はじめに

非線形力学系における初期値鋭敏性は、気象現象などの物理現象においても顕著に現れ、予測可能性の限界を規定している。ただし、この性質は、逆に小さな摂動を利用して大きな変動を引き起こすための有効な手段ともなり得る。リアプノフ指数は、初期値鋭敏性を特徴付ける広く知られた指標であるが、より繊細な現象の理解には限界がある。例えば、流体において最大リアプノフ指数以上に誤差が発展する現象が報告されている [1, 3]。

本研究では、力学系の摂動発展における局所的かつ一時的、さらに線形的なメカニズムに着目して、系の動的挙動を解析し制御・搅乱手法の構築に寄与することを目的とする。具体的には、エノン写像

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

の周期点周りの微小誤差の時間発展を調べ、系を搅乱する際にどの点をどの方向に摂動すると誤差発展が大きくなるかを各点でのヤコビ行列の特異値や固有値の影響をリアプノフ指数と比較しながら解析する。ただし、パラメータは  $a = 1.4, b = 0.3$  で固定する。この時、カオスアトラクタのリアプノフ指数は約 0.42 である。

以下では特異値解析 [2, 4] について説明する。

### 1.2 特異値解析

ここでは非線形力学系に与えた微小摂動の初期の線形発展について述べる。 $N$  次元の非線形離散力学系

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

\*本研究は小林幹准教授(立正大学)ならびに齊木吉隆教授(一橋大学)との共同研究である。

†E-mail:katohibiki17@gmail.com

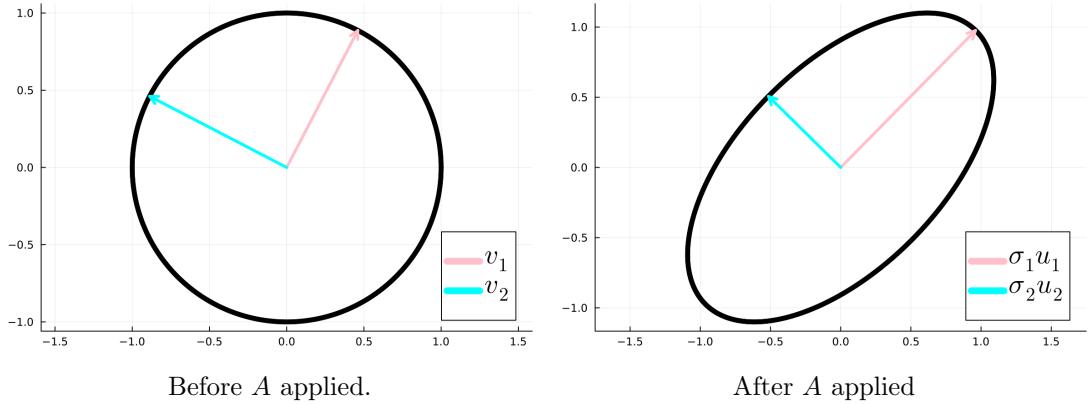


図 1: 行列  $A = U\Sigma V^\top$  で写像することにより 2 次元空間の単位円が橿円形に変形する様子.

について、初期値  $x_0$  に微小摂動  $y_0$  を与え、 $y_0$  がどう発展するかを考える。ここで、 $x_n$  の周りで  $F$  を線形化し、行列  $A_n$  を用いて  $y_{n+1} = A_n y_n$  とする。以下、線形の範囲において特異値を用いて誤差の発展を記述する。また、ここでは記号  $A_n$  を簡略化し  $A$  とする。

行列  $A^\top A$  の  $N$  個の固有値の平方根  $\sigma_i$  ( $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_N \geq 0$ ) を行列  $A$  の特異値と呼ぶ。この時、 $A$  は次のように特異値分解できる：

$$A = U\Sigma V^\top. \quad (1)$$

ここで、 $U, V$  は直交行列、 $\Sigma$  は  $\sigma_i$  を対角成分としてもつ対角行列である。行列  $U$  と  $V$  を次のように列ベクトルで表す：

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_N], \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_N].$$

$u_i$  を左特異ベクトル、 $v_i$  を右特異ベクトルと呼ぶ。ここで、(1)式から  $u_i$  および右特異ベクトル  $v_i$  はそれぞれ  $A^\top A$  および  $AA^\top$  の固有ベクトルである。

直交行列であるため、 $U^{-1} = U^\top$ 、 $V^{-1} = V^\top$  であることに注意すると、特異値分解 (1)式から

$$A^\top A = \Sigma^2 V, \quad A^\top A U = \Sigma^2 U, \quad (2)$$

$$A v_i = \sigma_i u_i, \quad A^\top u_i = \sigma_i v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

が分かる。

$A$  による摂動ベクトル  $y_0$  の拡大については、 $\|Ay_0\|^2 = \langle Ay_0, Ay_0 \rangle = \langle A^\top Ay_0, y_0 \rangle$  と (2) より、摂動ベクトル  $y_0$  が  $v_i$  に平行な時、拡大率は  $\sigma_i$  で与えられる。さらに (3) 式より  $v_i$  に平行な摂動ベクトルは、 $A$  による写像で  $u_i$  に平行になることがわかる。

$y_0$  の長さを  $\varepsilon$  に固定して、 $x_0$  周りの  $N$  次元球面を考えると  $y_0^\top y_0 = \varepsilon^2$ 、 $y_0 = A^{-1}y_1$  より、

$$y_1^\top (A^\top A)^{-1} y_1 = \varepsilon^2$$

となる。つまり、図 1 に示されるように、写像  $A$  によって  $x_0$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の  $N$  次元球面が、 $x_1$  を中心とする軸の両端までの長さが  $2\varepsilon\sigma_i$  で、方向が  $u_i$  の  $N$  次元橿円体に変形される。

## 2 分析手法

図 2 は本研究で扱うエノン写像のカオスアトラクタとアトラクタ内の各周期点の安定多様体を示している。本研究ではアトラクタに埋め込まれた周期 1 から 20 の周期点を扱う。ここで、同一周期軌道上の周期点は別個に扱うことに注意されたい。

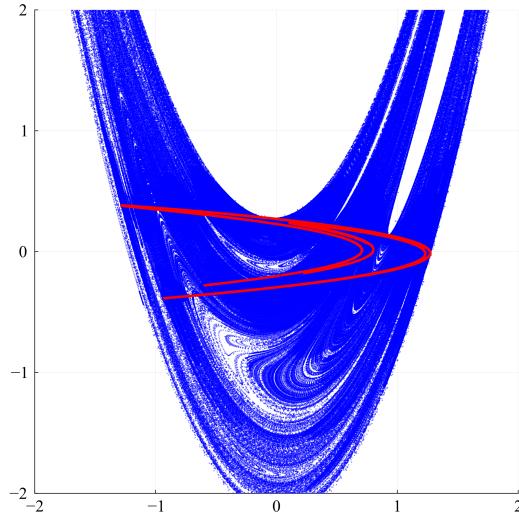


図 2: エノン写像 ( $a = 1.4, b = 0.3$ ) の各周期点の安定多様体と不安定多様体. 随所で安定多様体と不安定多様体が接しており, 非双曲力学系的特徴を示している.

まず, 図3のように, アトラクタ上の周期点  $x_i(0)$  を中心として半径  $\varepsilon$  の円周上に摂動点  $y_{i,j}(0)$  を等間隔に 1000 個配置する. ここで  $i$  は周期点のインデックス,  $1 \leq j \leq 1000$  は摂動点のインデックスを示す. 以下, 文脈に応じて  $x_i(0)$  や  $y_{i,j}(0)$  を省略し,  $x_i, y_{i,j}$  と記すことがある.

次に、これらの摂動点  $y_{i,j}$  を  $T$  回写像した後、以下のように評価する：

$$\begin{aligned} M_i(T) &= \max_{j,t \leq T} \|x_i(t) - y_{i,j}(t)\|, \\ R_i(T) &= \frac{M_i(T)}{\varepsilon}, \\ M(T) &= \max_i M_i(T). \end{aligned}$$

$M_i(T)$  は、周期点  $x_i$  における時刻  $T$  までの誤差  $\|x_i(t) - y_{i,j}(t)\|$  の最大値であり,  $R_i(T)$  は  $M_i T$  と初期摂動  $\varepsilon$  の比率である.  $M(T)$  はさらに周期点全体で  $M_i(T)$  の最大値を求めたものである. これを数値実験により近似的に計算し、アトラクタ上のどの点をどの方向に摂動することで、ある時刻以内で最大の誤差発展が達成されるかを考察する.

また、周期点  $x_i$  の周期を  $p_i$  とした時、 $x_i$  周りで

$$\begin{aligned} m_i &:= \max_j \|x_i(p_i) - y_{i,j}(p_i)\|^{\frac{1}{p_i}}, \\ r_i &:= \frac{m_i}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}, \end{aligned}$$

を考えると、各周期軌道 1 周分の構造を含めつつ、異なる周期をもつ周期点通しの誤差発展の比較が可能となる.  $r_i$  は  $\varepsilon^{\frac{1}{p_i}}$  で  $m_i$  を割ることで、 $R_i$  と同様に初期摂動  $\varepsilon$  との比率を計算しており、図 10 で固有値と比較するために導入した.

さらに、周期点  $x_i$  単体ではなく、 $x_i$  が属する周期軌道の安定性について考えるために、 $F$  をエノン写像とし、周期点  $x_i$  での周期回写像  $F^{p_i}$  のヤコビ行列  $J_i$  を考える.  $J_i$  の絶対値最大の固有値を  $1/p_i$  乗したものを  $\lambda_i$ ,  $J$  の固有ベクトルのなす角を  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$ ) とする.  $\lambda_i$  で  $1/p$  乗することで、周期の異なる周期軌道間での誤差発展等の比較が可能になる(図 7).

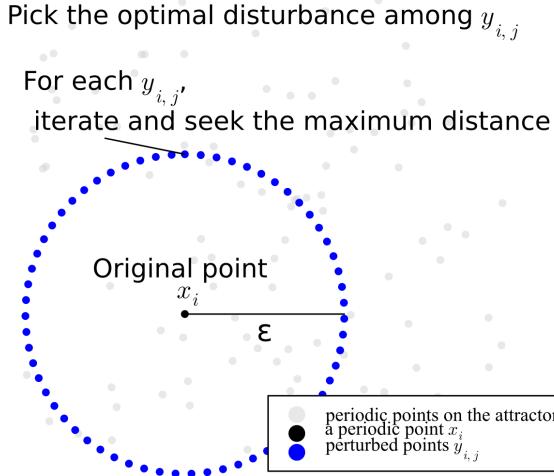


図 3: 数値実験手法. 各周期点  $x_i$  について, その点を中心として半径  $\varepsilon$  の円周上に点  $y_{i,j}$  を等間隔に配置し, それらを全て時間発展させて, 最も元の点との誤差発展が大きいものを求める.

### 3 主結果

初期摂動  $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-8}$  に対し,  $T = 1, \dots, 50$  での  $T$  までの最大誤差発展  $M(T)$  を計算した. 図 4 を見ると,  $M(T)$  (青点) が, アトラクタのリアプノフ指数を示す (橙線) と, 今回最も高い不安定性を示す周期軌道である固定点の最大固有値 (緑線) を越えた誤差発展を示していることがわかる. 初期の特異な部分を除けば, 固有値  $\lambda_i$  の大きい点が強い誤差発展を示し, 最大誤差が 1 付近で飽和していることが分かる.

図 5, 6 は  $T = 1, 4, 17, 30$  における相空間上での  $M(T)$  および  $M_i(T)$  の様子を示しており,  $T = 1, 4$  ではアトラクタの  $[0, 1.3]$  付近の右端もしくは  $[-1.3, 0.4]$  付近の左端で  $M(T)$  が達成されていることがわかる.  $T = 17$  付近では図 7 と比べると分かるように, 不安定性の強い固定点付近で  $M(T)$  を達成している.  $T = 30$  において,  $\varepsilon = 10^{-8}$  の場合は依然固定点付近の誤差拡大率が優勢だが,  $\varepsilon = 10^{-5}$  は, 誤差のスケールが 1 付近で飽和しており, 広範な範囲で高い誤差成長を示している.

ここから,  $T$  が小さい時にアトラクタの右端・左端で見られる特異な誤差発展について考える. まず, 図 8 にあるように, 有限時間リアプノフ指数 (Finite Time Lyapunov Exponents, FTLE) と  $\varepsilon = 10^{-5}, T = 4$  における誤差発展の指数を比較した. FTLE を計算する際はアトラクタ上の  $10^6$  長のカオス軌道に対して, 窓幅  $T$  の最大リアプノフ指数を計算した. ここで, リアプノフ指数に合わせるために, 図中の赤線の値は  $\ln(\frac{M(T)}{\varepsilon})/T$  である. この比較から,  $T$  が小さい時の誤差発展が, リアプノフ指数で得られる誤差発展の指標を上回ることが示唆される.

アトラクタ上の周期点の安定・不安定多様体に注目すると, 図 2 より, アトラクタ左端・右端において, 不安定多様体と安定多様体が接している様子が分かる. 接点付近では安定方向と不安定方向のなす角が小さく, これによって特異な誤差拡大を示すことが示唆される. そこで, より単純なケースとして, 線型写像でこの現象を確認した. 固有値が  $[0.5, 0.9]$  の行列  $B_1, B_2$  を構成する. 固有値 0.5 の固有ベクトル  $l_1$  を  $[1, 0]$  に並行なベクトルで固定し, 固有値 0.9 の固有ベクトル  $l_2$  を  $l_1$  となす角  $\phi$  のベクトルで定める.  $\phi = \frac{\pi}{2}$  の行列を  $B_1$ ,  $\phi = \frac{9}{10}\pi$  の行列を  $B_2$  とする. こ

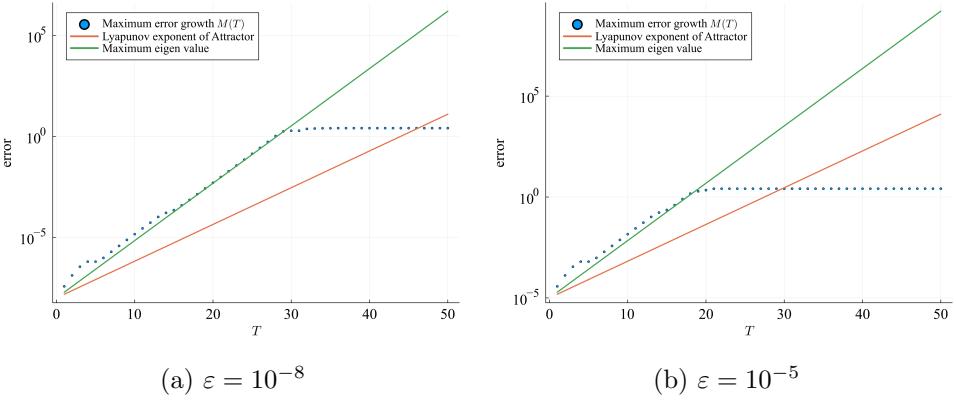


図 4: アトラクタから計算したリアプノフ指数, 最も高い不安定性を持つ周期軌道である固定点の最大固有値, 空間内で最も大きい誤差  $M(T)$  の比較. (a), (b) はそれぞれ初期摂動  $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-5}$  の  $T$  に対する  $M(T)$

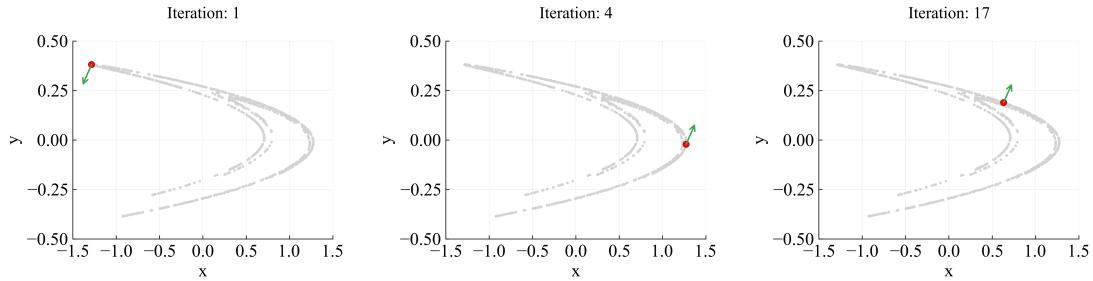


図 5: 図 4 の  $\varepsilon = 10^{-5}$  について  $T = 1, 4, 17$  における  $M(T)$  を達成する周期点  $x_i$ (赤) とその時の摂動方向(緑). 最適な摂動方向は不安定方向(不安定多様体の接線方向)ではないことが分かる.

ここで注意したいのは,  $B_2$  の固有ベクトルのなす角が  $B_1$  に比べ小さいことと, 固有値の絶対値が 1 より小さいため, 原点が安定であることである. この時, 行列  $B_1, B_2$  を単位円に作用させると, 1.2 節で示したように, 左特異ベクトルの方向に特異値分単位円が伸縮し, 楕円が見える. 図 9 より, 固有ベクトルが直交する  $B_1$  に関しては元の単位円より全体的に縮小しているのに対し,  $B_2$  に関しては, 伸長している部分が存在しており, なす角が小さいと最大特異値が大きくなることを確認した.

上の線型写像の例と同様のことが今回のエノン写像でも発生していることが考えられる. 図 10 では,  $x_i$  において周期回写像  $F^{p_i}$  のヤコビ行列  $J_i$  の固有ベクトル同士のなす角  $\theta_i$  と, 各周期軌道の 1 回写像あたりの最大誤差発展率  $r_i$  を  $\lambda_i$  で割った値の関係が図示されている. 誤解を恐れずに言うと,  $r_i/\lambda_i$  は固有値の最大何倍誤差発展するかを表している. 図では  $\theta_i$  が小さくなるほど,  $r_i/\lambda_i$  が幕的に大きくなる傾向が示唆されている.

以下では, 大きな誤差発展を達成する摂動方向について述べる. 図 5 に示されるように, 最大誤差  $M(T)$  を達成する摂動方向は, 必ずしも不安定方向とは一致しない. 上で見ていた誤差発展の現象は線形的な現象なため, 1.2 節で紹介したように, 最大誤差を達成する摂動方向は線型写像を決める行列の右特異ベクトルにより得られる. 図 11 では, 周期軌道 1 周期での最大誤差発展  $m_i$  を達成するような最適摂動方向(図 11a)と, 周期回写像  $F^{p_i}$  における安定方向に直交する方向(図 11b)を比較している. 各周期点における両者のなす角を比較した結果, 今回我々が扱うエノン写像において, 最適摂動方向がほとんど安定方向の直交方向に一致していることが確認された.

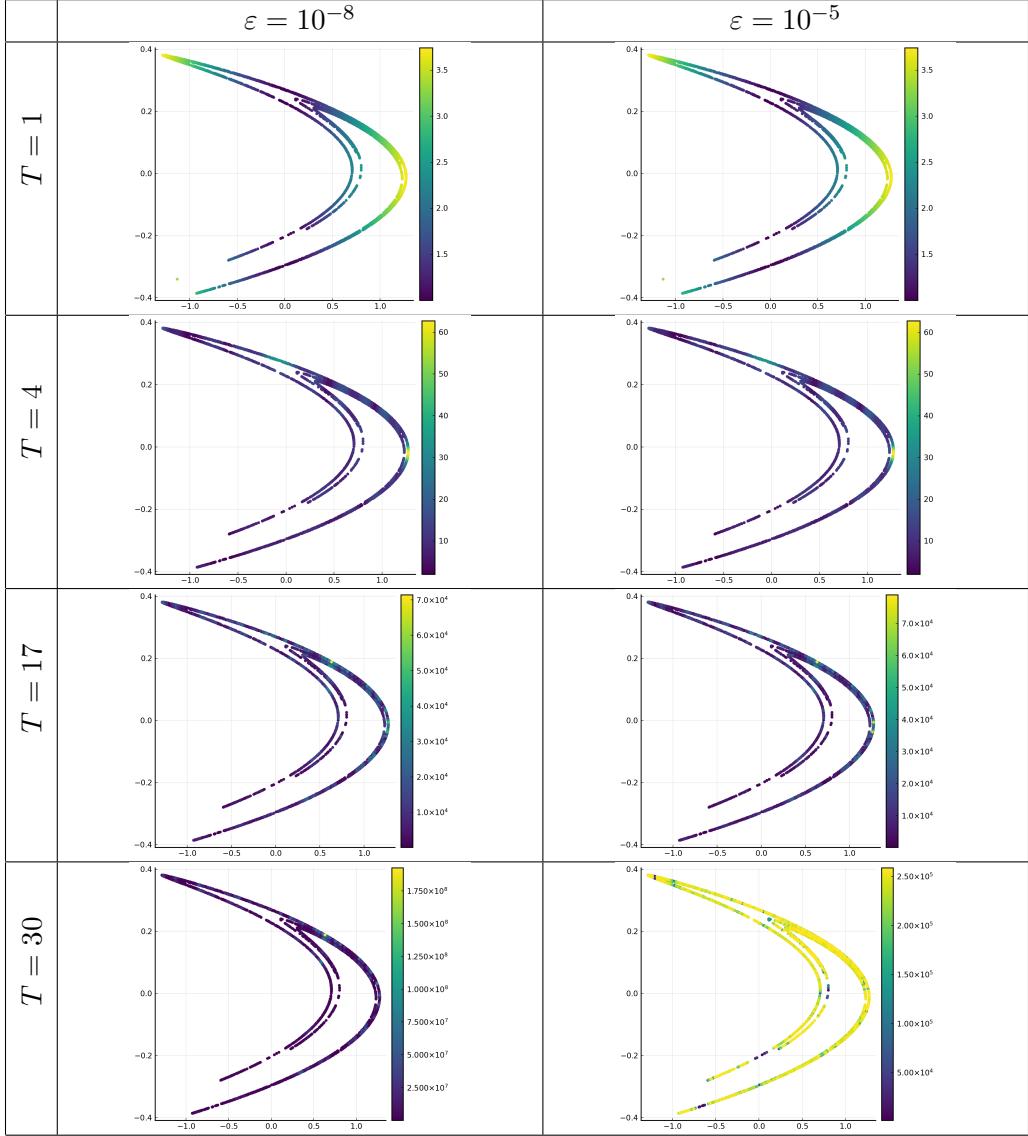


図 6: 初期誤差の小さい線形的な誤差発展と大きい非線形的な誤差発展の比較. 初期摂動サイズ  $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-5}$  と  $M_i(T)$  の比率を表す  $R_i(T)$  の値の変化を  $T = 1, 4, 17, 30$  に対して観測した.  $T = 17$  まで  $\varepsilon = 10^{-8}, \varepsilon = 10^{-5}$  の図はほとんど一致している.  $T = 1$  ではアトラクタの左端と右端の  $R_i(T)$  が大きく,  $T = 4$  ではより顕著に右端の  $R_i(T)$  が大きい.  $T = 17$  においては,  $[0.6, 0.2]$  付近に存在する固定点で  $R_i(T)$  が大きくなっている.  $T = 30$  の時,  $\varepsilon = 10^{-8}$  については,  $T = 17$  との変化は小さいが,  $\varepsilon = 10^{-5}$  は誤差のサイズが 1 付近で飽和しており, 随所で  $R_i(T)$  が大きくなっている.

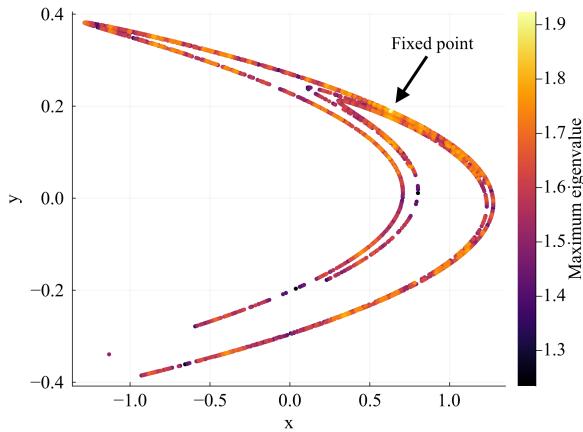


図 7: 各周期点における固有値. 各周期点  $x_i$  において, 周期回分の写像  $F^{p_i}$  を線形化して固有値を計算し, 絶対値最大の固有値を  $1/p_i$  乗した値  $\lambda_i$  で  $x_i$  を色付けした. 矢印で示された固定点の不安定性が高いことが分かる.

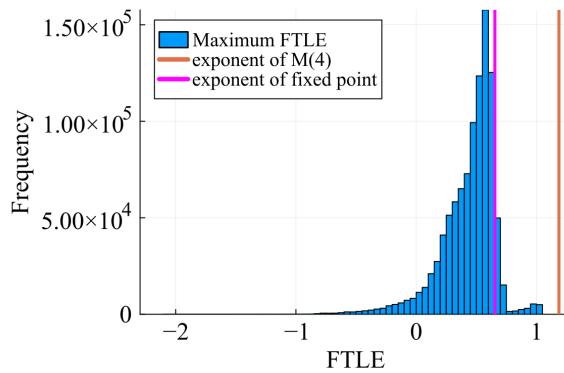


図 8:  $T = 4$  での有限時間リアプノフ指数の分布と,  $M(T)$  の比較. 図 4 の補足として, 得られた  $M(T)$  がリアプノフ指数を上回ることを示すため,  $T = 4, \varepsilon = 10^{-5}$  での  $M(T)$  の誤差発展指数  $\ln(\frac{M(T)}{\varepsilon})/T$  (赤) と, アトラクター上の軌道に対して, 窓サイズ  $T$  の最大有限時間リアプノフ指数の分布 (青) を計算した. また, 固定点のリアプノフ指数を縦線 (マゼンタ) で示した.  $M(T)$  の誤差発展がリアプノフ指数以上であることが示唆される.

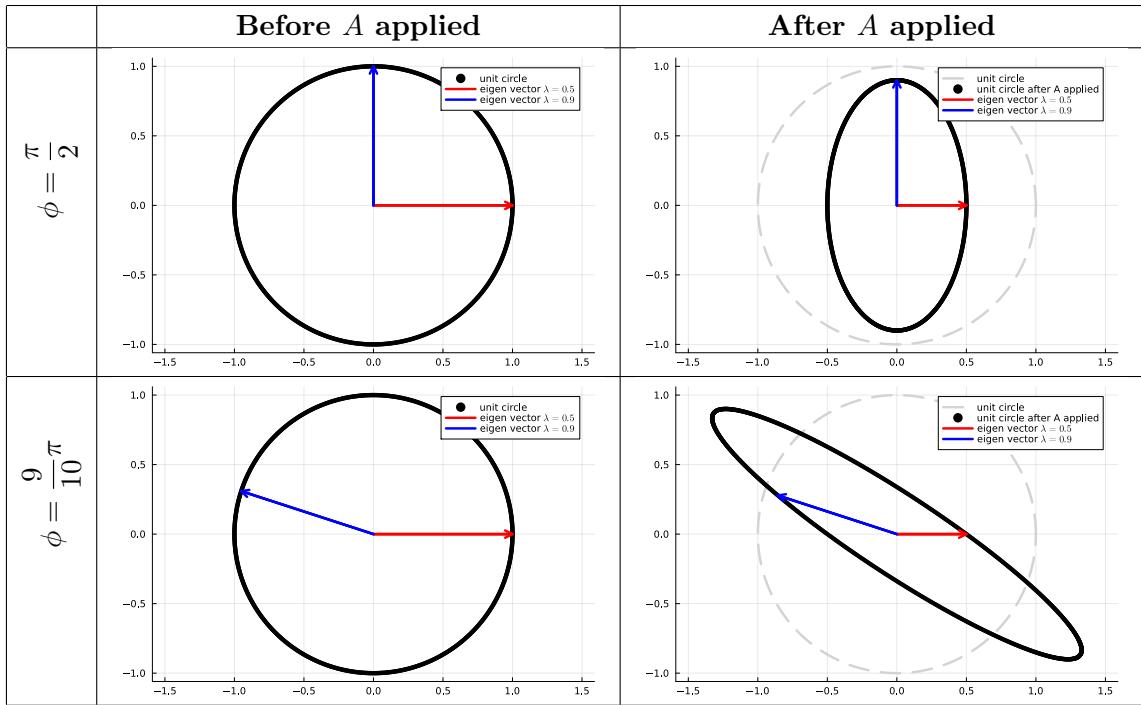


図 9: 線型写像において、固有ベクトルの非直交性により生じる短期的な固有値以上の伸びの実現. ある 2 種類の行列  $B_1, B_2$  によって、単位円がどのように変形されるかを考える. 固有値は両者とも  $[0.9, 0.5]$  に固定し、固有ベクトルのなす角度  $\phi$  を上段は  $\frac{\pi}{2}$ 、下段は  $\frac{9}{10}\pi$  と変えたところ、単位円を写像した後の楕円の長軸 (最大特異値) が大きくなる現象が観測された.

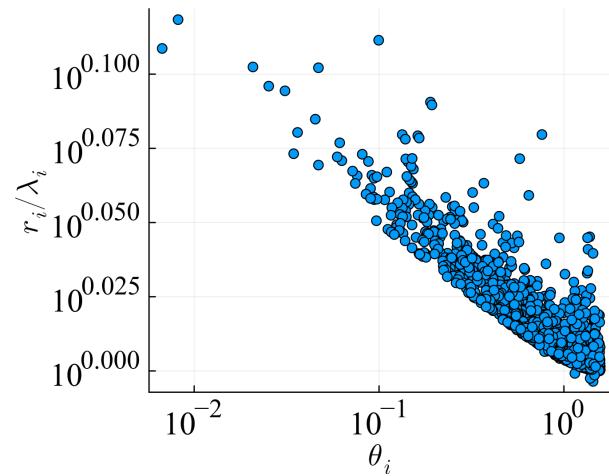
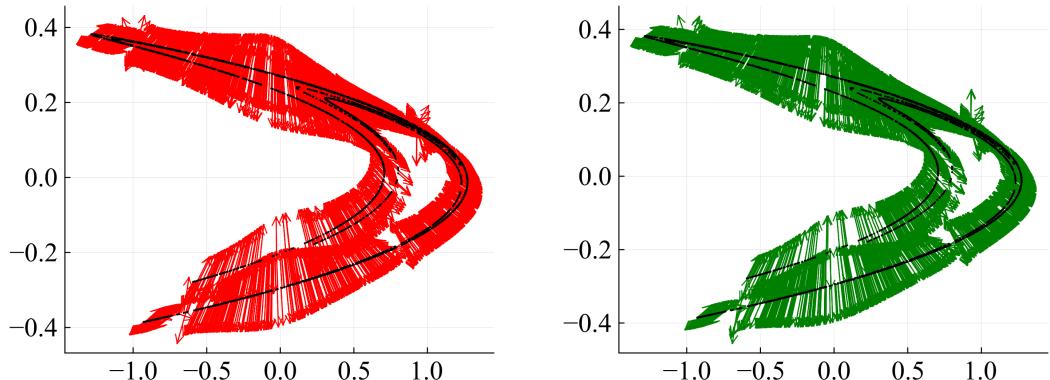


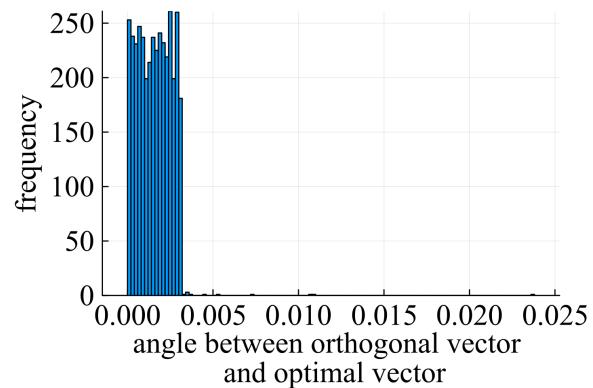
図 10:  $J_i$  の固有ベクトルのなす角  $\theta_i$  と  $r_i/\lambda_i$  の比較. 周期軌道の平均的な誤差成長率が、 $\theta_i$  が小さいほど固有値以上に幕的に大きくなることが示唆される.



(a) 最適摂動方向

(b) 安定部分空間と直交する方向

mean: 0.0015913971131203371  
std: 0.001023241789512976



(c) 両者のなす角の分布

図 11: 最適摂動方向と安定空間に直交する方向の比較. (a) は, 各周期点において,  $m_i$  を達成する, つまり周期 1 周分で最も誤差発展する摂動方向を矢印で示している. (b) は, 周期回写像  $F^{p_i}$  の安定方向に直交する方向を矢印で示している. (c) は, 各周期点において, 前者と後者とのなす角度の分布を示している. 平均は  $1.6 \times 10^{-3}$ , 標準偏差は  $1.0 \times 10^{-3}$  と, ほとんど 0 付近に分布しており, 両者がほとんど一致していることが分かる.

## 4 終わりに

本稿では、エノン写像の周期点について、安定方向と不安定方向のなす角により、摂動の時間発展が固有値やリアプノフ指数以上になる現象を数値的に示した。また、大きい誤差発展を達成するような摂動方向について数値実験から得られた結果を紹介した。

本稿では低次元の力学系を対象としたが、今回紹介したような現象が高次元系においてどのように現れるかは依然として未解明である。特に、高次元力学系では複数の安定方向も関与するため、大自由度系では異なる描像が現れる可能性がある。

また、本研究の結果を実際の物理現象で検証するためには、安定多様体や周期軌道に関する情報を得ることが重要となる。その際、Lagrangian coherent structures やリザバー計算といった機械学習手法が有用な解析手段となる可能性がある。

## 参考文献

- [1] Z. C. Feng and Y. Charles Li. Short term unpredictability of high Reynolds number turbulence - rough dependence on initial data. *ejde*, 2020(01-132), October 2020.
- [2] B Legras and R Vautard. A guide to Liapunov vectors. In *Seminar Proceedings on Predictability*, volume I, pages 141–156, 1996.
- [3] Y. Charles Li, Richard D. J. G. Ho, Arjun Berera, and Z. C. Feng. Superfast amplification and superfast nonlinear saturation of perturbations as the mechanism of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 904:A27, December 2020.
- [4] 余田 成男. 1. 予測可能性概論. *天気*, 46(3):170–178, 1999.